

مکانیک سیالات پیشرفته

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک



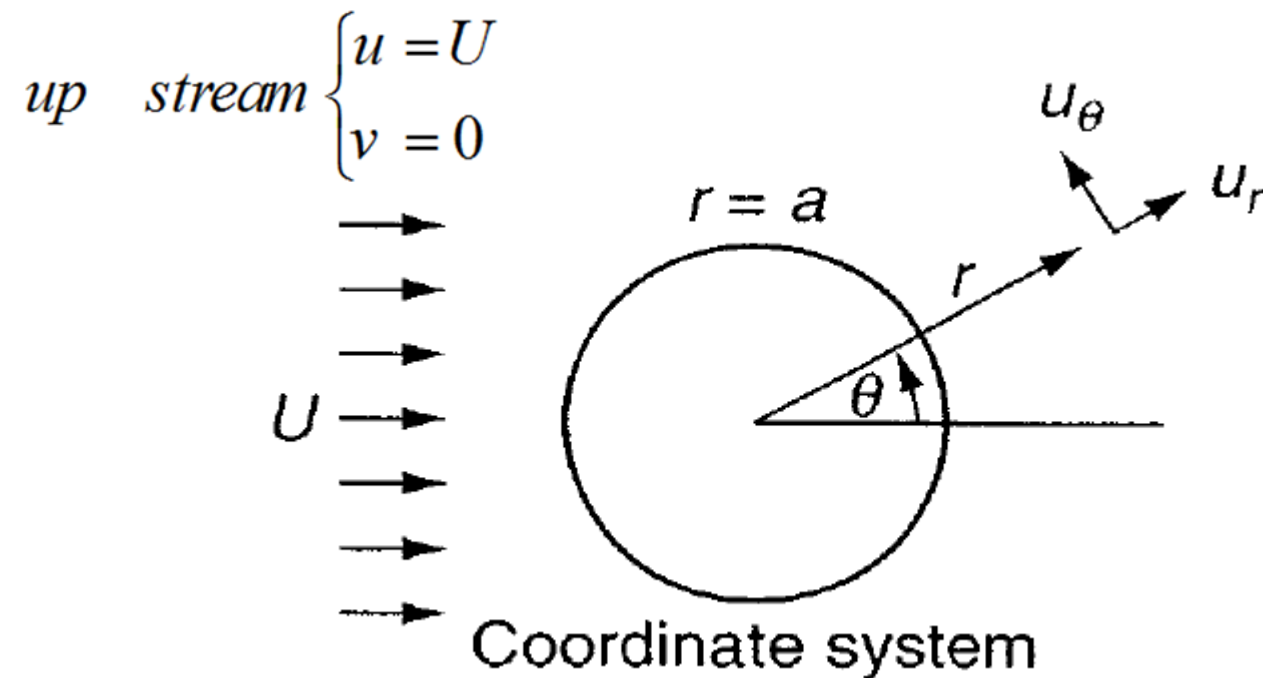
فصل سوم: جریان های داخلی آرام و حل های تحلیلی دقیق در مکانیک
سیالات جریان آرام – بخش سوم

کلاس درس دکتر نوری
خرداد ۱۴۰۰

جریان خزشی حول یک کره:

- جریان خزشی حول یک کره از جمله مسائل کلاسیک در مکانیک سیالات محسوب می شود که دارای کاربرد در بعضی مسائل (نظیر مساله رسوب ذرات) است.

- برای حل این مساله از دستگاه مختصات کروی متقارن محوری استفاده می کنیم (مساله نسبت به جهت ϕ متقارن فرض شده است):



$$v_r = v_r(r, \theta), v_\theta = v_\theta(r, \theta), v_\phi = 0$$

$$v_r = \frac{+1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow \text{معادله پیوستگی را ارضا می نماید}$$

$$E^4(\psi) = E^2(E^2(\psi)) = 0$$

$$E^2(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$$

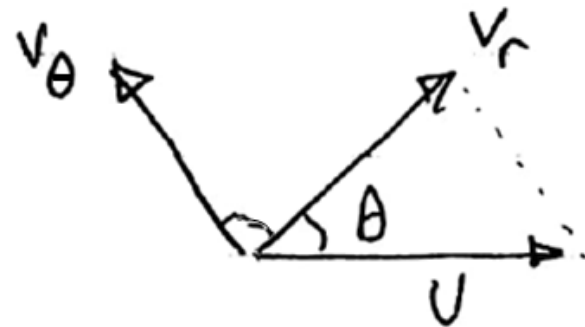
تفاوت عملگر E^2 نسبت به ∇^2 مربوط به نحوه تعریف تابع جریان در دستگاه مختصات کروی (هم این طور

استوانه ای متقارن محوری) است. در این دستگاه مختصات، بعد ψ ، $\frac{m^3}{s}$ است؛ حال آنکه در دستگاه قطبی

و دکارتی، تابع جریان دیمانسیون $\frac{m^2}{s}$ دارد (یک طول اضافی، در مخرج تعریف ψ وجود دارد).

حل مسئله در نقاط دور دست ($r \rightarrow \infty$):

در نواحی دور دست، کره اثری بر جریان ندارد. به عبارت دیگر، در نواحی دور دست، جریان دارای شرایط بالا دست (up stream) است.



$$\text{در بالا دست} \quad \begin{cases} v_r = U \cos \theta \\ v_\theta = -U \sin \theta \end{cases}$$

$$v_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow -U \sin \theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = U r \sin^2 \theta$$

$$\psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta + f(\theta)$$

$$v_r = \frac{+1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta \rightarrow \frac{+1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{U}{2} r^2 \times 2 \cos \theta \sin \theta + f' \right) = U \cos \theta$$

$$U r^2 \cos \theta \sin \theta + f'(\theta) = U r^2 \cos \theta \sin \theta \rightarrow f'(\theta) = 0 \rightarrow f(\theta) = C$$

شرایط مرزی:

$$at : r \rightarrow \infty : \psi = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta + C$$

$$at : r \rightarrow a : \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \rightarrow (v_\theta = 0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \rightarrow (v_r = 0) \end{cases}$$

معادله مومنوم $E^4 \psi$ به شکل زیر نیز قابل بازنویسی است:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 \psi = 0$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} + \frac{\cot^2 \theta}{r^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial \theta^2}$$

$$- \frac{2 \cot \theta}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^4} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} = 0$$

$$\psi = f(r)g(\theta)$$

می توان نشان داد که در سمت θ ، پاسخ بصورت $\sin^2 \theta$ است. (از شرط مرزی در $r \rightarrow \infty$ نیز چنین چیزی استنباط می شود):

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta$$

با قرار دادن ψ در معادله $E^4\psi$ ، معادله زیر برای f حاصل می شود:

$$\frac{d^4 f}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{8f}{r^4} = 0$$

معادله فوق، صورت مرتبه 4 معادله کوشی- اویلر است.

*** یادآوری: معادله مرتبه n کوشی- اویلر به صورت زیر است:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

پاسخ این معادله به صورت $y \propto x^m$ است.

بنابراین، پاسخ $f \propto r^m$ خواهد بود. با قرار دادن r^m در معادله دیفرانسیل f ، داریم:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) - 4m(m-1) + 8m - 8 = 0$$

$$m^4 - 6m^3 + 7m^2 + 6m - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$$

بنابراین، برای f داریم:

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

$$\psi(r, \theta) = \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right) \sin^2 \theta$$

$$at : r \rightarrow \infty : \psi = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \left\{ \begin{array}{l} \text{پس، بزرگترین توان } \psi \text{ باید 2 باشد.} \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{U}{2} \\ D = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

از طرفی، در $r=a$ داریم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \text{ \& } \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(\frac{-A}{r^2} + B + 2Cr \right) \sin^2 \theta \rightarrow \frac{-A}{a^2} + B + Ua = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 \right) \times 2 \cos \theta \sin \theta \rightarrow \frac{A}{a} + Ba + \frac{U}{2} a^2 = 0$$

$$\rightarrow A = \frac{Ua^3}{4}, B = \frac{-3}{4} Ua$$

پس:

$$\psi = \frac{1}{4} U a^2 \left\{ \frac{a}{r} - \frac{3r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right\} \sin^2 \theta$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} - \frac{3a}{2r} \right) \\ v_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = U \sin \theta \left(-1 + \frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r} \right) \end{cases}$$

ویژگی های حل فوق عبارتند از:

- 1- جریان مستقل از ویسکوزیته است (تمام جریان های خزشی اینگونه هستند).
- 2- جریان فاقد گردابه است؛ حال آنکه در جریان های دارای Re بالا اینگونه نیست.

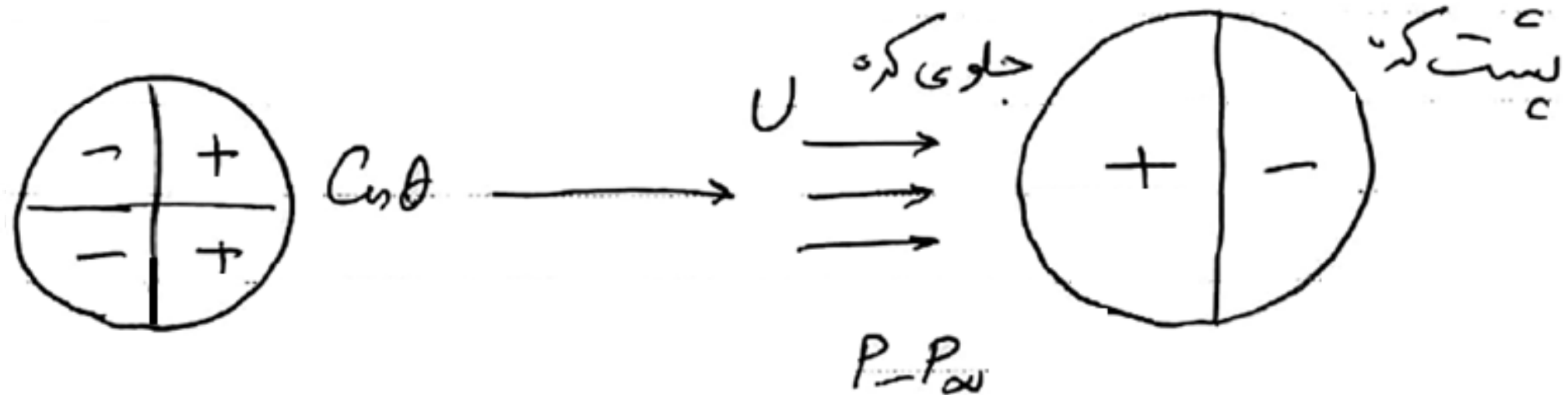
3- سرعت در همه نقاط کمتر از سرعت جریان در دور دست است. حال آنکه در حل جریان پتانسیل، نواحی با سرعت بیشتر از سرعت بالا دست روی کره وجود دارند.

4- اثر کره تا فواصل زیادی وجود دارد (لایه مرزی اطراف کره بسیار ضخیم است). به نحوی که در $r=10a$ ، سرعت ها هنوز 10٪ کمتر از سرعت بالا دست (U) هستند.

با داشتن توزیع سرعت (ترم های v_r و v_θ) و قرار دادن آن در معادلات r و θ دستگاه مختصات کروی و انتگرال گیری، می توان توزیع فشار جریان را به دست آورد.

$$P = P_\infty - \frac{3\mu a U}{2r^2} \cos \theta$$

مطابق رابطه فوق، اختلاف فشار $(p - p_\infty)$ ، در نیمه سمت راست کره منفی و در نیمه سمت چپ کره مثبت است.



به این ترتیب، یک درگ حاصل از فشار روی کره ایجاد می شود. برای محاسبه درگ اصطکاکی، باید تنش برشی را محاسبه کنیم.

$$\tau_{r\theta} = \mu \dot{\gamma}_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{-\mu U \sin \theta}{r} \left(\frac{3a^3}{2r^3} \right)$$

$$F = - \int_A \tau_{r\theta} \Big|_{r=a} \times \sin \theta dA - \int_A p \Big|_{r=a} \times \cos \theta dA$$

$$r' = a \sin \theta$$

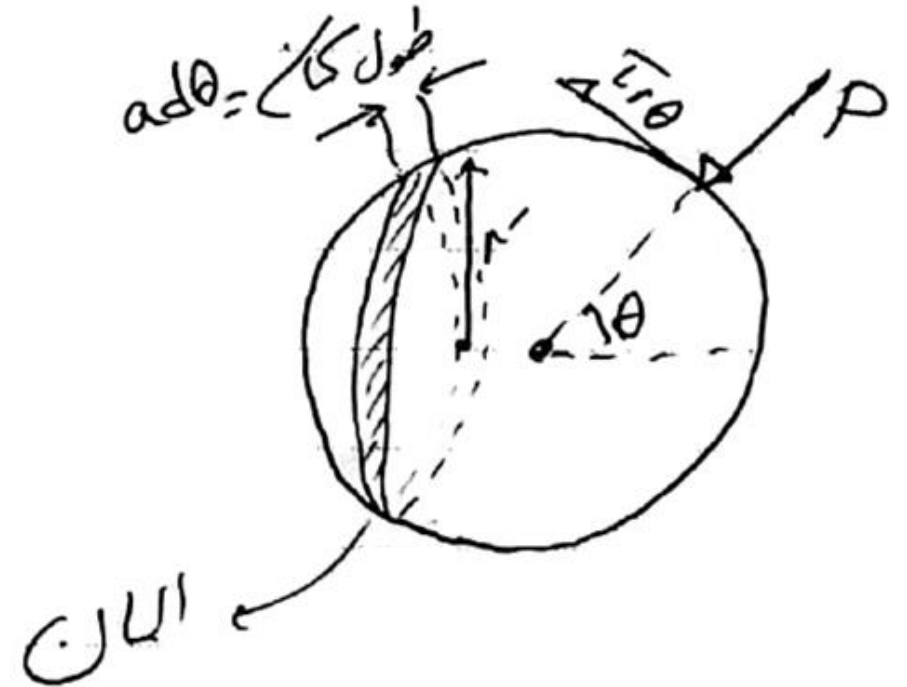
$$dA = 2\pi r' (a d\theta)$$

$$dA = 2\pi a \sin \theta \times a d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

روی سطح کره :

$$r = a \rightarrow \begin{cases} \tau_{r\theta} = \frac{-3\mu U \sin \theta}{2a} \\ p = \frac{-3\mu U \cos \theta}{2a} \end{cases}$$

↙
 $p_\infty = 0$



$$F_{Drag} = \underbrace{\frac{3\mu U}{2a} \times 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{\text{درگ اصطکاکی}} + \underbrace{\frac{3\mu U}{2a} \times 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}_{\text{درگ فشاری}}$$

$$F_{Drag} = 3\mu U \pi a \times \underbrace{\frac{4}{3}}_{\text{انتگرال } \sin^3 \theta} + 3\mu U \pi a \times \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{انتگرال } \cos^2 \theta \sin \theta} \rightarrow F_{Drag} = 6\pi\mu U a$$

$$Re = \frac{\rho U \times 2a}{\mu}, C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho A U^2} = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho \underbrace{\pi a^2}_{\text{سطح تصویر کرده}} U^2}$$

$$C_D = \frac{6\pi\mu Ua}{\frac{1}{2}\rho\pi a^2 U^2} = \frac{24}{\frac{\rho U \times 2a}{\mu}} = \frac{24}{Re} \rightarrow \text{رابطه استوکس برای کره در جریان خزشی}$$

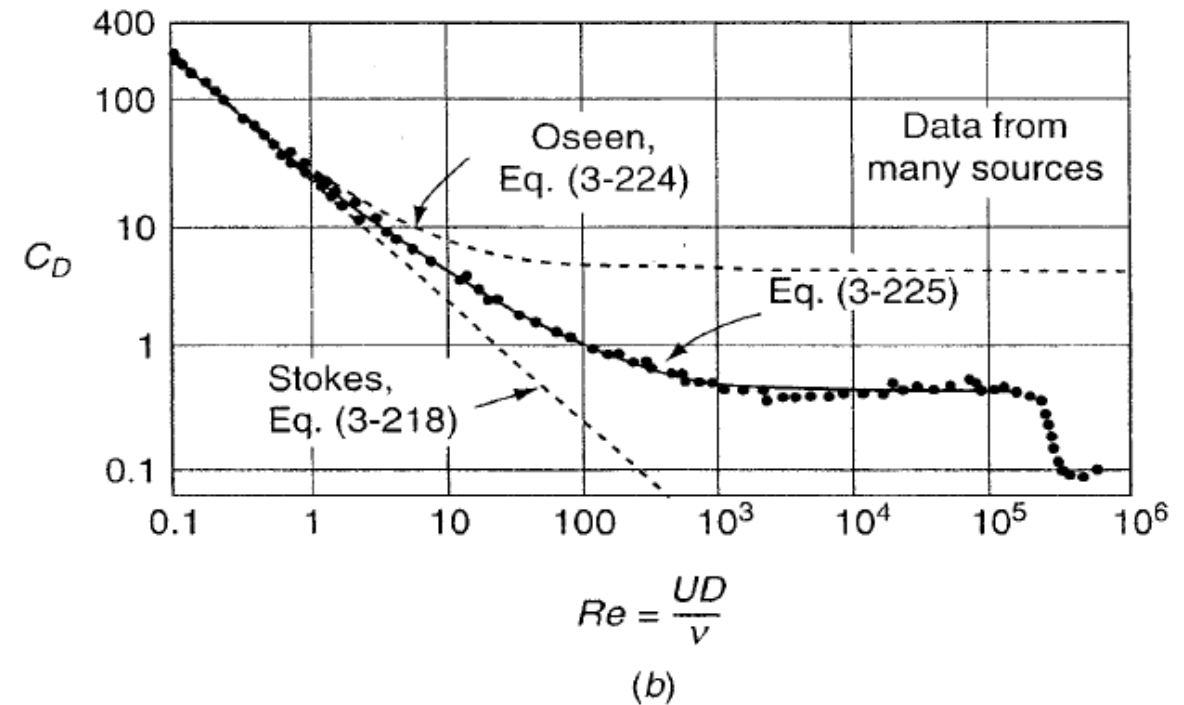
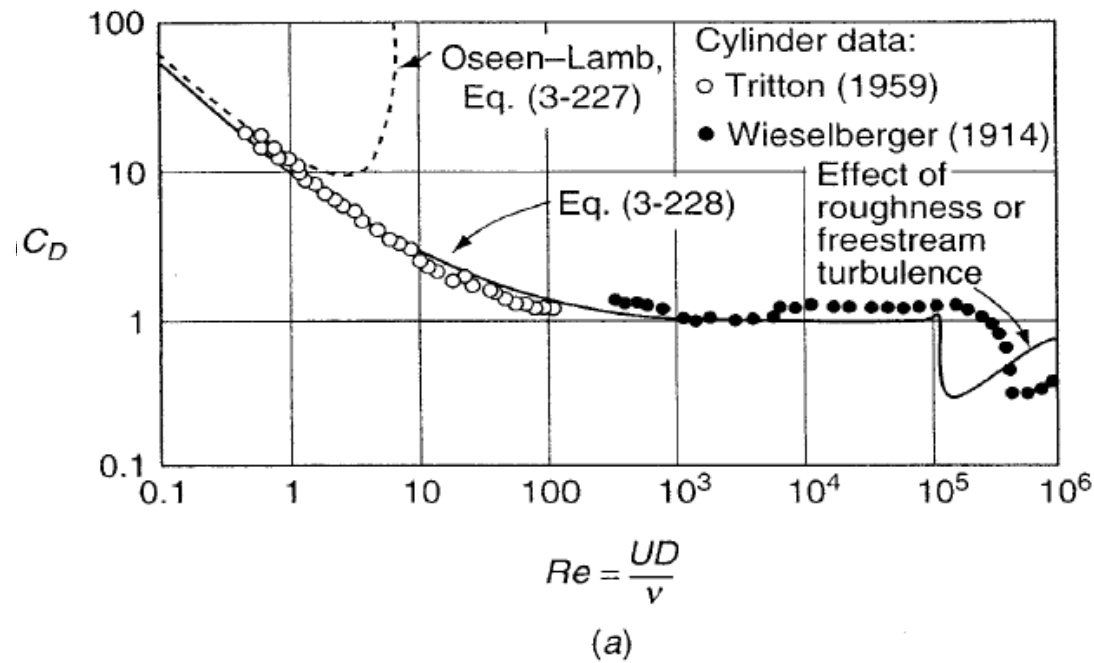
* توجه: رابطه فوق عملاً برای $Re < 1$ معتبر است.

برای جریان اینرسی، حل‌های دیگری از طریق حساب اختلالات، یا روش‌های دیگر در اعداد رینولدز کوچک ارائه شده است.

$$C_D = \frac{24}{Re} \left\{ 1 + \frac{3}{16} Re + \dots \right\}$$

- رابطه فوق برای $Re > 3$ واکرا می‌شود.

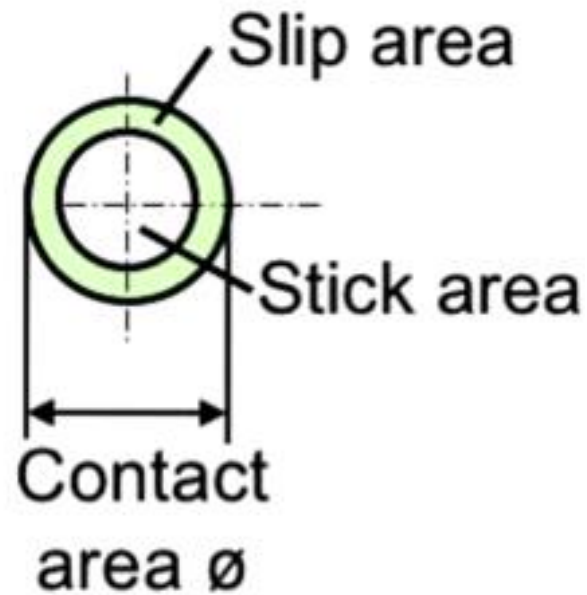
- روابط دیگری در کتاب وایت برای ضریب درگ کره در رینولدزهای بالاتر، ارائه شده است (عمدتاً آزمایشگاهی).



Comparison of experiment, theory, and empirical formulas for drag coefficients of a cylinder and a sphere (smooth walls): (a) cylinder; (b) sphere.

تئوری روغنکاری:

روغنکاری یا کاهش اصطکاک بین دو جسم لغزنده، توسط یک سیال لزج که در درز نازک ولی متغیر بین آنها قرار دارد، صورت می گیرد.



- یکی از اهداف تئوری روغنکاری، محاسبه بار یاتاقان است.

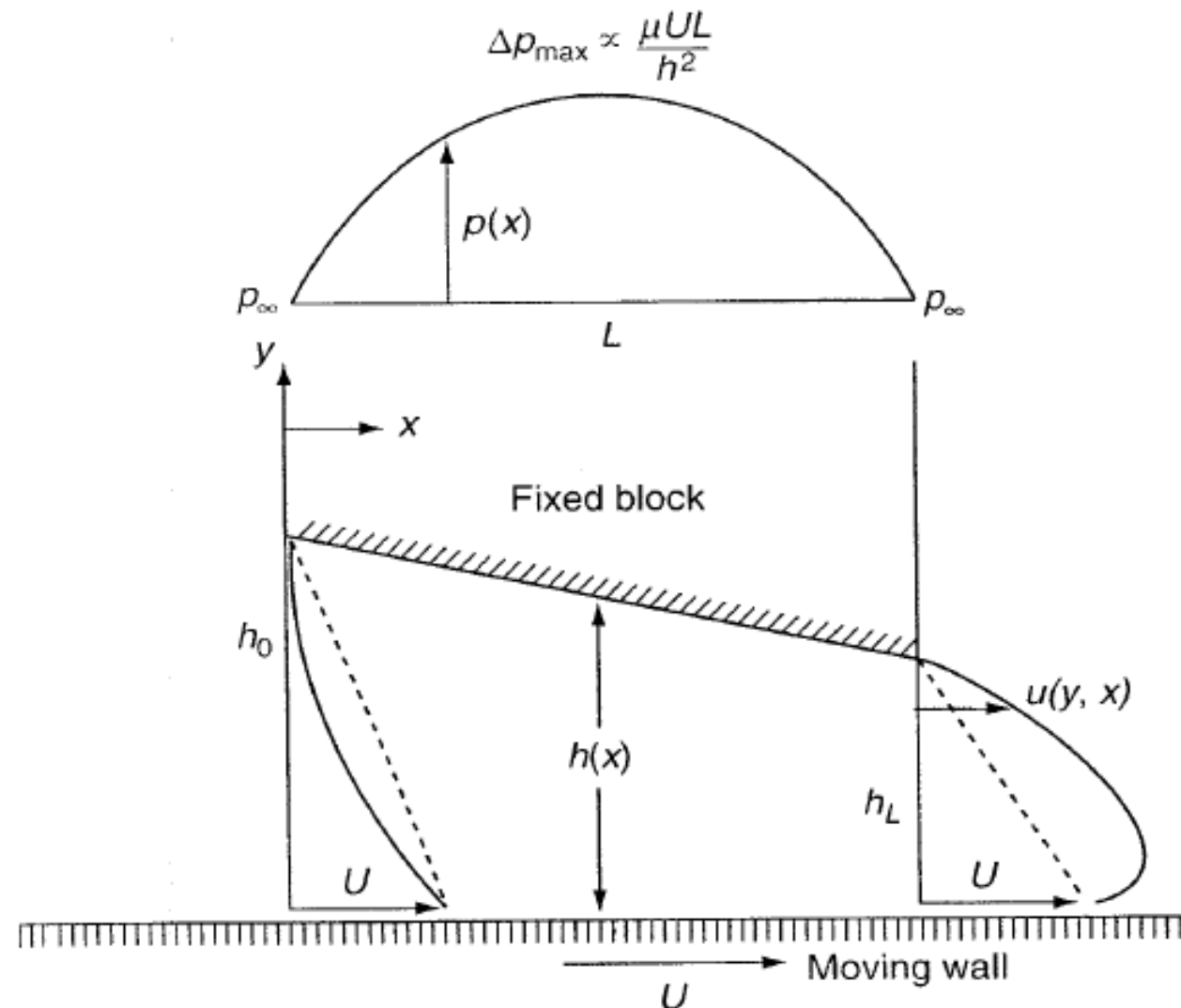
- مساله روغنکاری به مساله رینولدز نیز معروف است.

در این مسئله، فرض بر آن است که طول مسیر روغنکاری از اندازه درز یا تاقان بسیار بزرگتر است ($h \ll L$). و بنابراین، جریان درون درز از نیروی اینرسی کمتری نسبت به نیروی ویسکوز برخوردار است:

$$\rho U \frac{U}{L} \ll \mu \left(\frac{U}{h} \right)^2$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- بنابراین، توزیع سرعت در این مساله از رابطه جریان کوئت پیروی می کند. به دلیل تغییر سایز h نسبت به x (درز همگرا یا واگرا)، نمی توان از اثر گرادیان فشار صرفنظر نمود؛ زیرا در غیر این صورت، معادله پیوستگی ارضا نخواهد شد.



$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) + U(1 - \frac{y}{h}) \quad (*)$$

توزیع فشار باید به گونه ای باشد که معادله پیوستگی را ارضا نماید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy = -v(h) + v(0)$$

با فرض عدم تزریق و مکش از دیواره ها، مقدار v روی دیواره ها صفر خواهد بود:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0 \quad (**)$$

چنانچه، رابطه (*) را در رابطه (**) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right] = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}$$

- معادله فوق به معادله رینولدز معروف است (1886) که یک معادله مرتبه 2 نسبت به فشار است و شرایط آن به صورت $P(x=0) = P(x=L) = P_{\infty}$ قابل تعریف است.

- با حل معادله فوق، توزیع فشار (بار یا تاقان) محاسبه می شود.

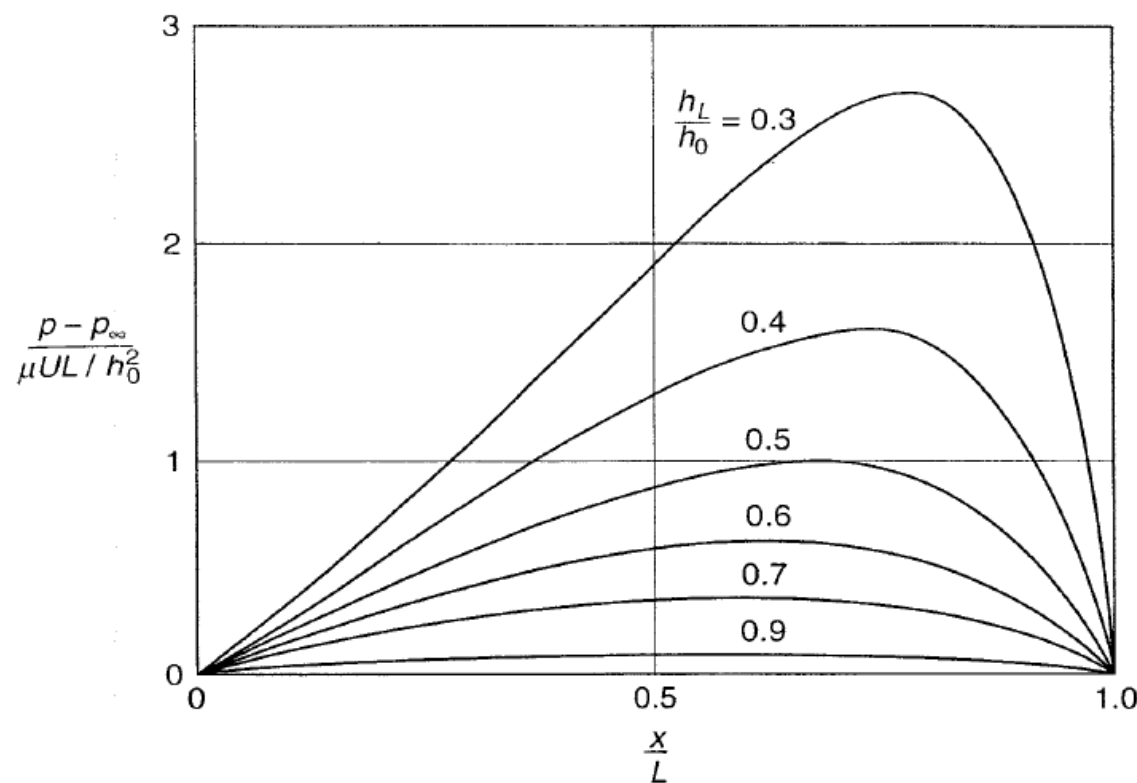
پاسخ رینولدز برای یک درز خطی:

برای یک درز خطی، داریم:

$$h = h_0 + (h_L - h_0) \frac{x}{L}$$

با قرار دادن توزیع خطی h و دوبار انتگرال گیری، داریم:

$$\frac{P - P_\infty}{\mu UL / h_0^2} = \frac{6(\frac{x}{L})(1 - \frac{x}{L})(1 - \frac{h_L}{h_0})}{(1 + \frac{h_L}{h_0}) \left[1 - (1 - \frac{h_L}{h_0}) \frac{x}{L} \right]^2}$$



- مشاهده می شود که برای یک درز همگرا با کاهش مقدار $\frac{h_L}{h_0}$ (از دیاد همگرایی)، مقدار P_{\max} افزایش می یابد که این امر مبین افزایش میزان بار وارد بر یاتاقان است که می تواند به پاره شدن فیلم روغن منجر شود.
- چنانچه جهت حرکت صفحه لغزنده تغییر کند ($U < 0$)، در این صورت فشار داخل درز از P_{∞} کمتر خواهد بود و بنابراین در یک درز واگرا احتمال وقوع کاویتاسیون (کمتر شدن فشار سیال از فشار بخار در دمای محیط) وجود خواهد داشت.

صورت عمومی معادله رینولدز:

صورت عمومی معادله رینولدز، برای یک درز سه بعدی (دارای تغییرات در راستای Z) و با فرض حرکت دیوار در جهت x ، به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[h \{ U(0) + U(h) \} + 12\mu \{ V(h) - V(0) \} \right]$$

※ توجه: در اینجا h تابع x و z است ($h=h(x,z)$) و U و V سرعت های افقی و قائم در ورودی و خروجی درز هستند. در اینجا باید فشار در چهار طرف درز معلوم باشد.

The End